



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



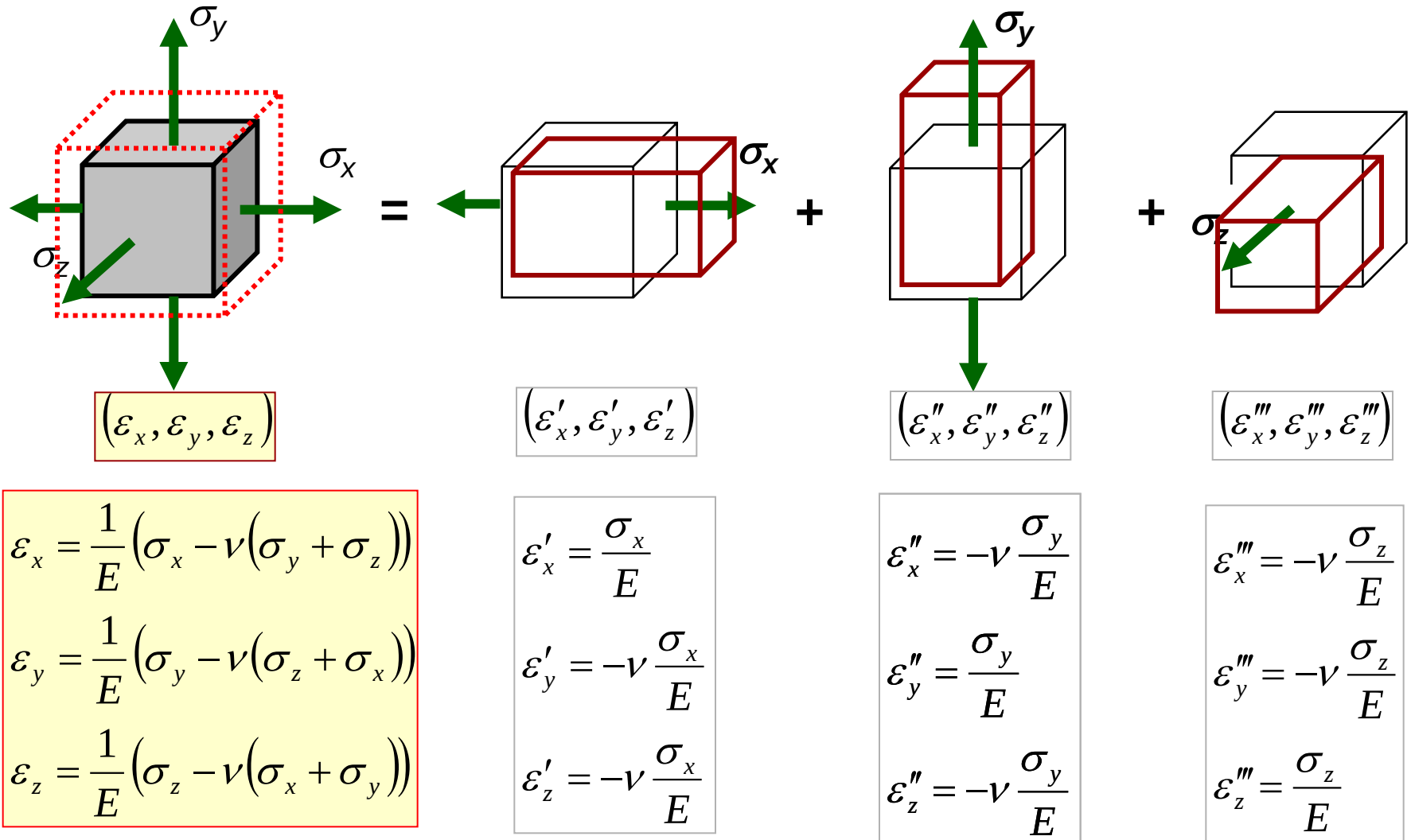
Ćwiczenia 4

Prawo Hooke'a - zadania

Przykłady zadań z wykorzystaniem prawa Hooke'a

Uogólnione prawo Hooke'a

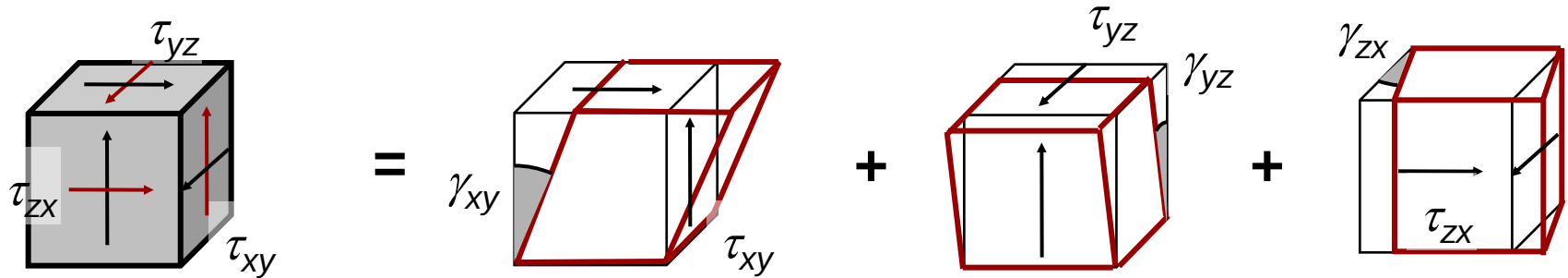
Rozważmy stan naprężenia jako superpozycję trzech stanów prostego rozciągania



Efektem działania naprężeń normalnych jest stan odkształceń liniowych

Uogólnione prawo Hooke'a

Rozważmy stan naprężenia jako superpozycję trzech stanów ścinania kolejno w trzech płaszczyznach



Efektom działania naprężeń tnących jest stan odkształceń postaciowych

$$(\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$(\gamma_{xy}, 0, 0)$$

$$(0, \gamma_{yz}, 0)$$

$$(0, 0, \gamma_{zx})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

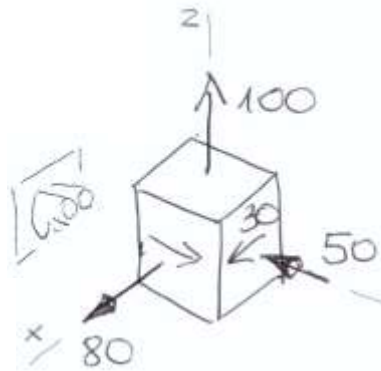
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

G - moduł Kirchhoffa

ZADANIE 4.1



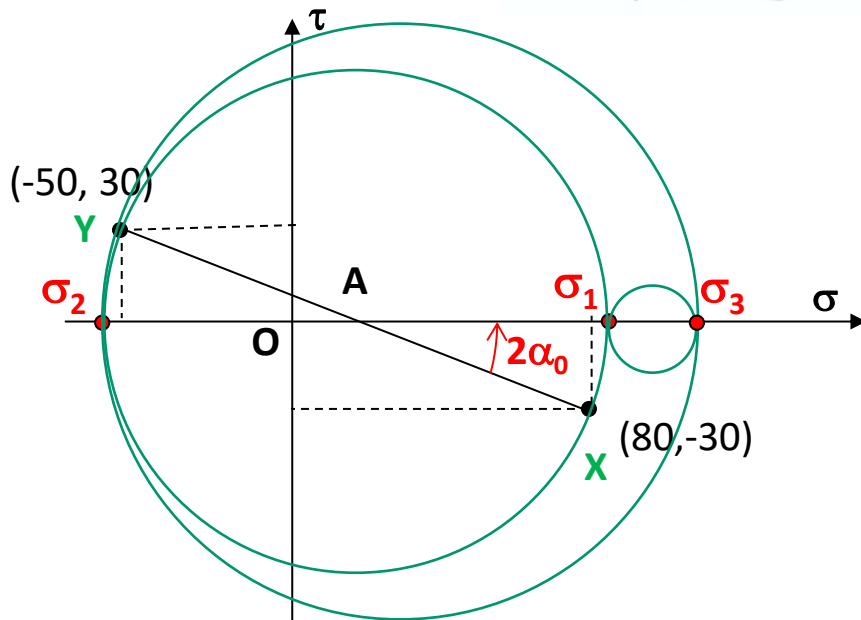
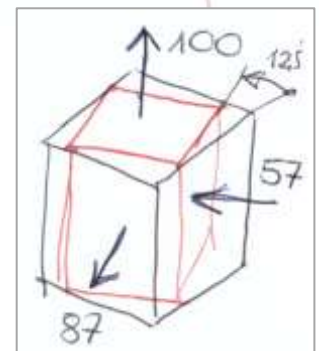
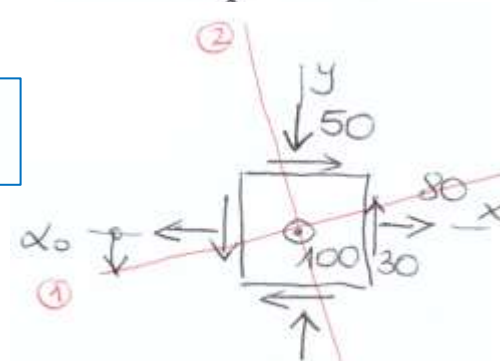
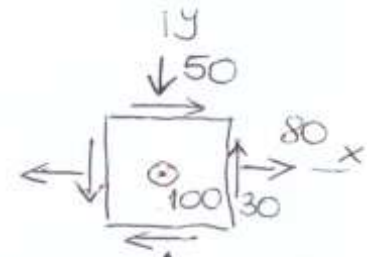
Zad. Dany jest stan naprężenia.

Znaleźć $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

materiał - stal: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$

$\nu = 0.3$

(I) Spójrzmy na kostkę z kierunku z



Skorzystamy z prawa Hooke'a

$$OA = \frac{80 - 50}{2} = 15$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{80 + 50}{2}\right)^2 + 30^2} = 72$$

$$\sigma_1 = OA + R = 87 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = OA - R = -57 \text{ MPa}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{30}{\frac{80 + 50}{2}}\right) = 12,5^\circ$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [87 - 0.3(-57 + 100)] = 0.37 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-57 - 0.3(100 + 87)] = -0.56 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [100 - 0.3(87 - 57)] = 0.455 \cdot 10^{-3}$$

ZADANIE 4.1

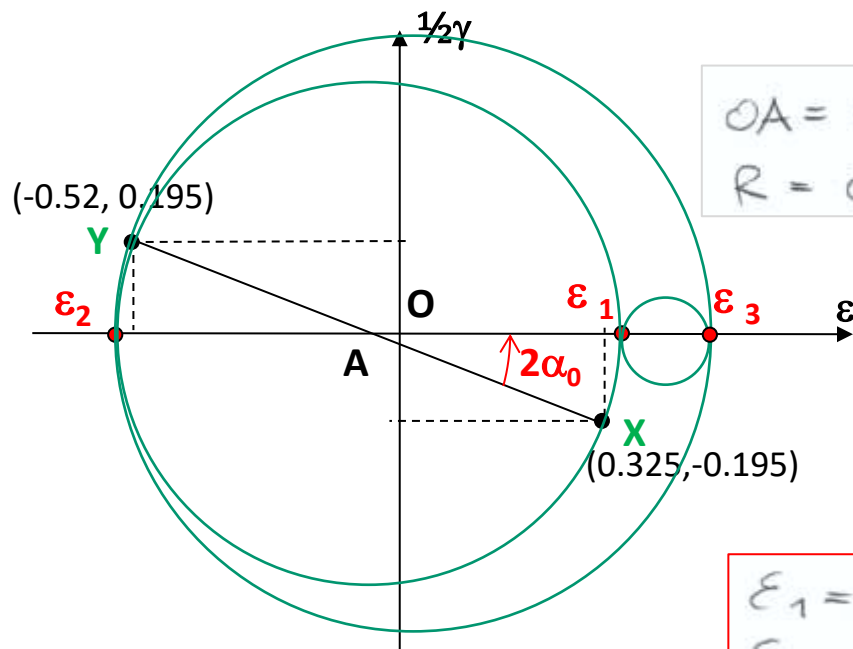
II) Sposób. Korzystamy najpierw z prawa Hooke'a

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [80 - 0.3(-50 + 100)] = 0.325 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-50 - 0.3(100 + 80)] = -0.52 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [100 - 0.3(80 - 50)] = 0.455 \cdot 10^{-3}$$

Przestwór odkształceń



$$OA = -0.095 \cdot 10^{-3}$$

$$R = 0.465 \cdot 10^{-3}$$

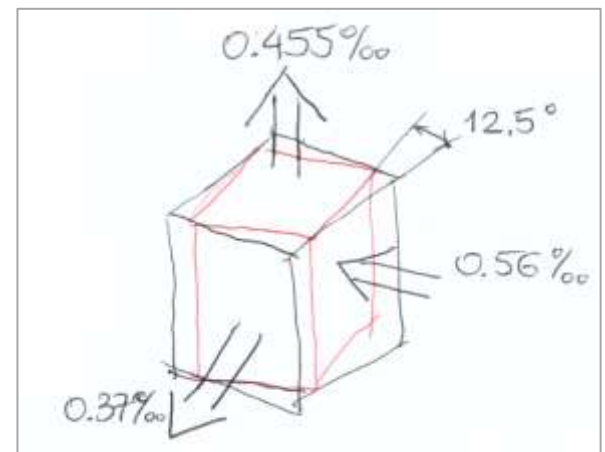
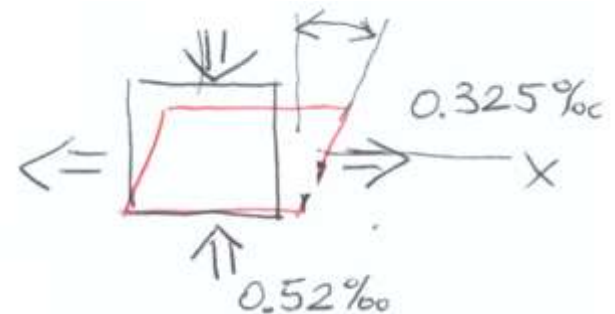
$$\varepsilon_1 = 0.37 \cdot 10^{-3}$$

$$\varepsilon_2 = -0.56 \cdot 10^{-3}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2(1+0.3)} = 7.69 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{-30}{7.69 \cdot 10^4}$$

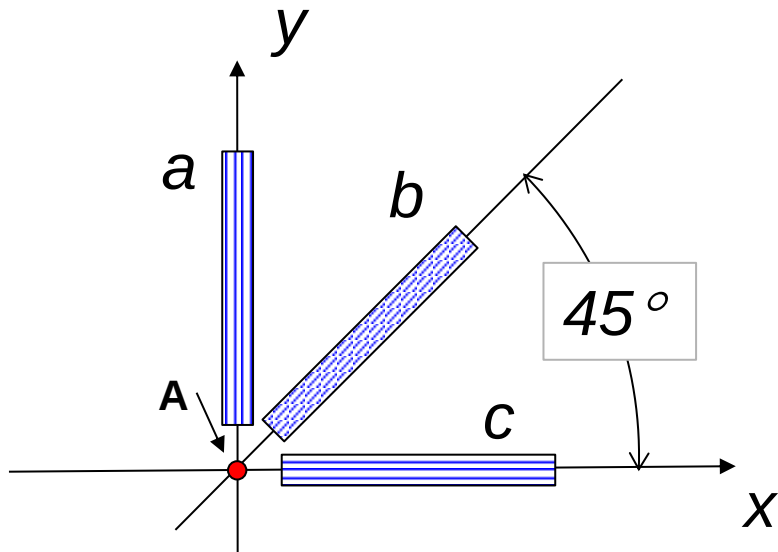
$$\gamma_{xy} = -3.9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$



ZADANIE 4.2

W pewnym punkcie pokrycia skrzydła samolotu naklejono rozetkę trzech tensometrów **a**, **b** i **c**.
W pewnej chwili lotu zmierzono wskazania tensometrów: ε_a , ε_b , ε_c .

- 1) Wyznaczyć odpowiadający temu stan naprężenia
- 2) Określić i pokazać kierunki główne naprężenia



Material – dural

$$E = 7 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.32$$

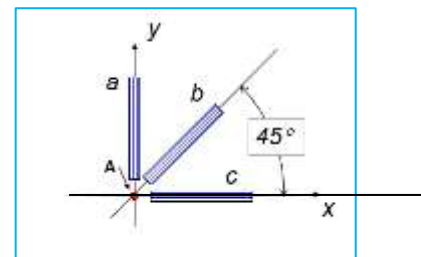
$$\varepsilon_a = 0.4 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_b = -0.2 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_c = 0.1 \text{ ‰}$$

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$

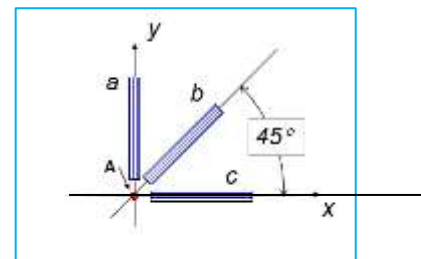
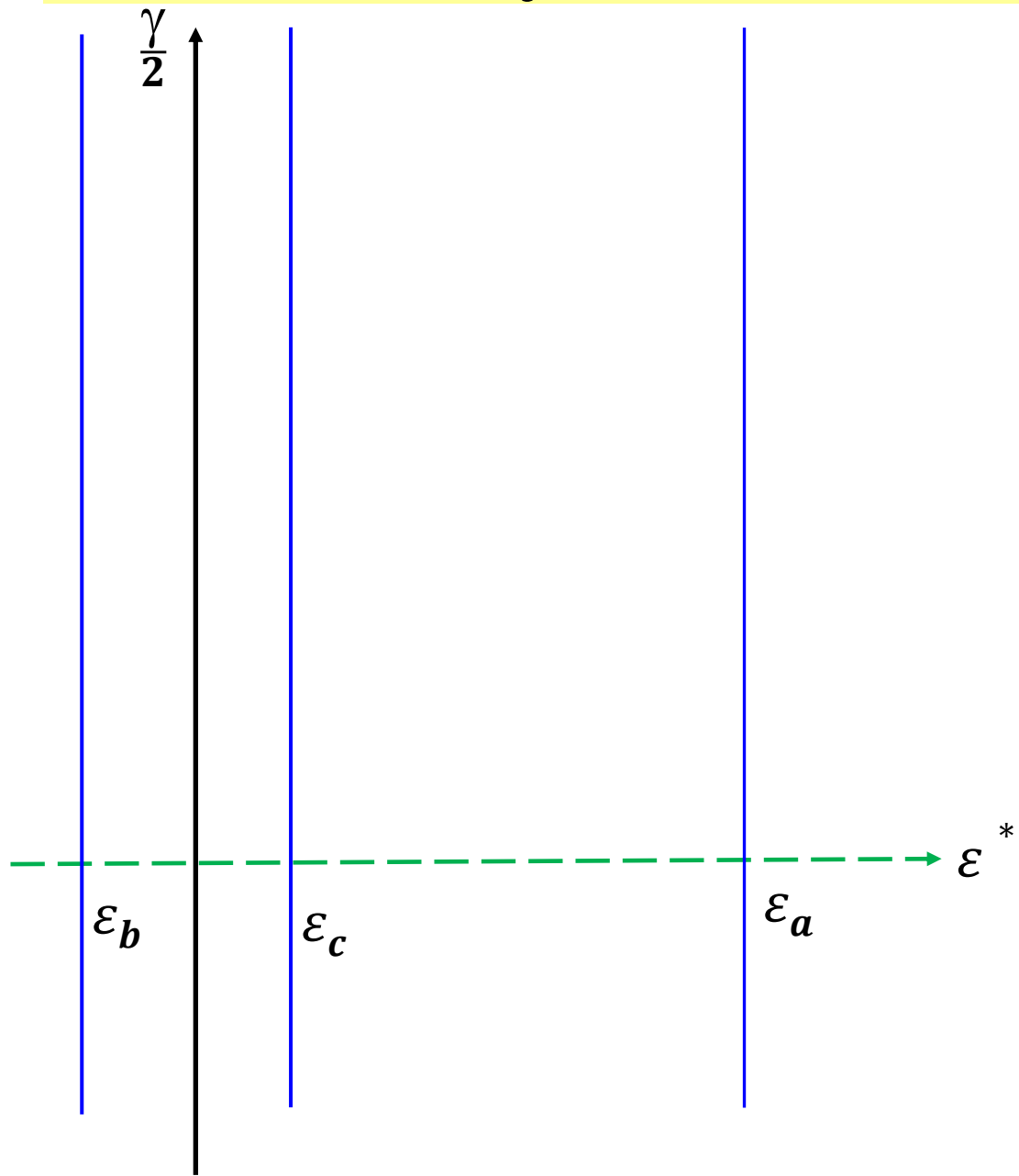
$\frac{\gamma}{2}$



1) Rysujemy oś $\gamma/2$ i oś pomocniczą ε^*

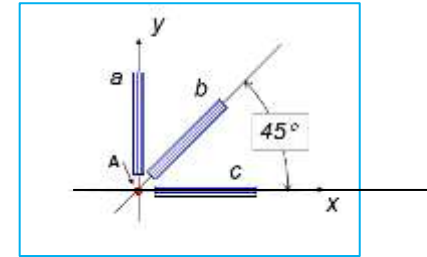
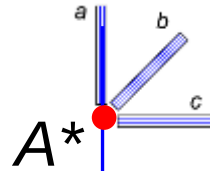
ε^*

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°

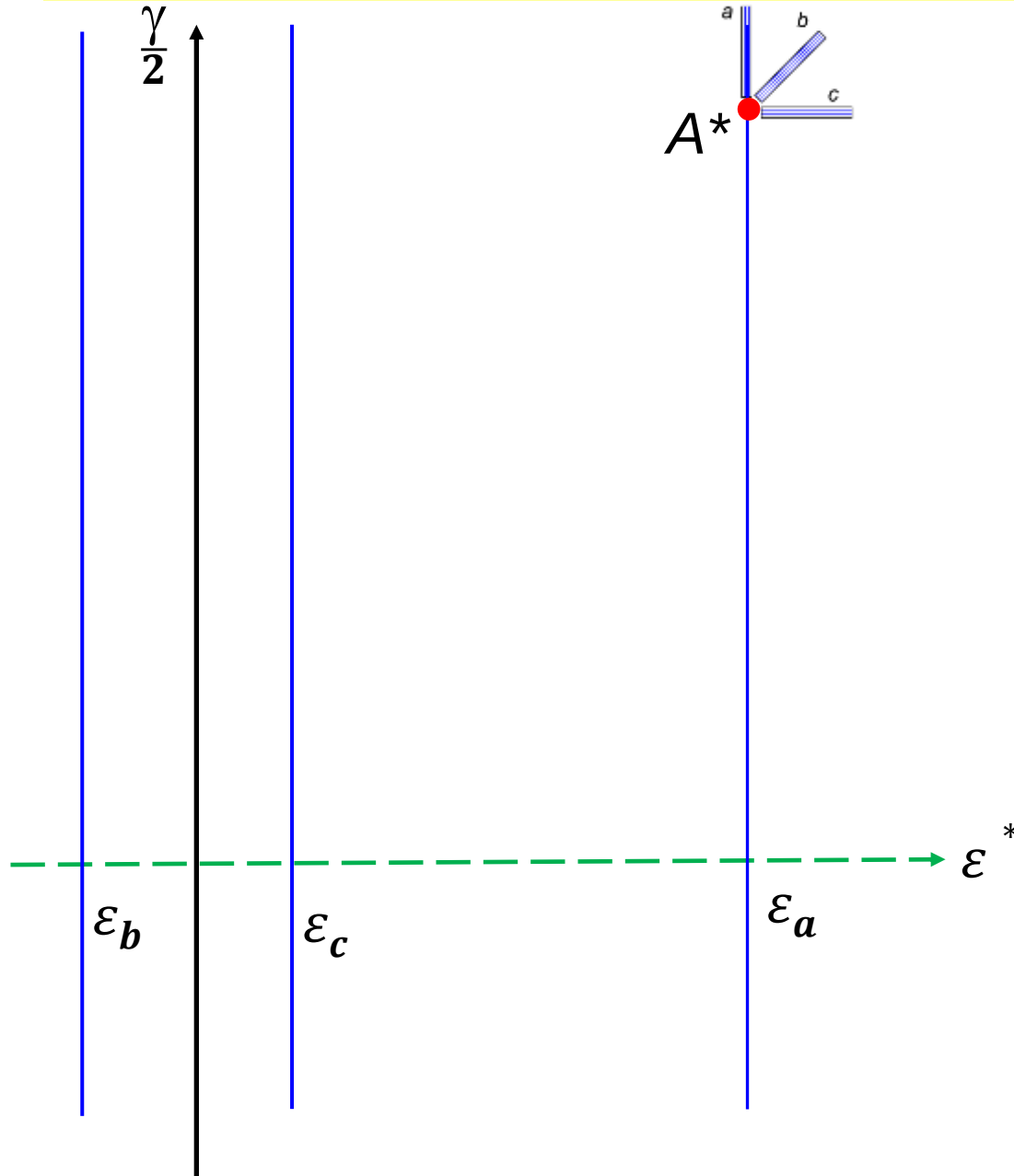


2) Rysujemy linie wskazań tensometrów

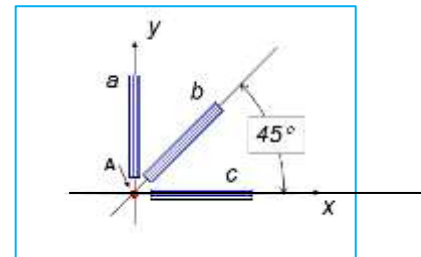
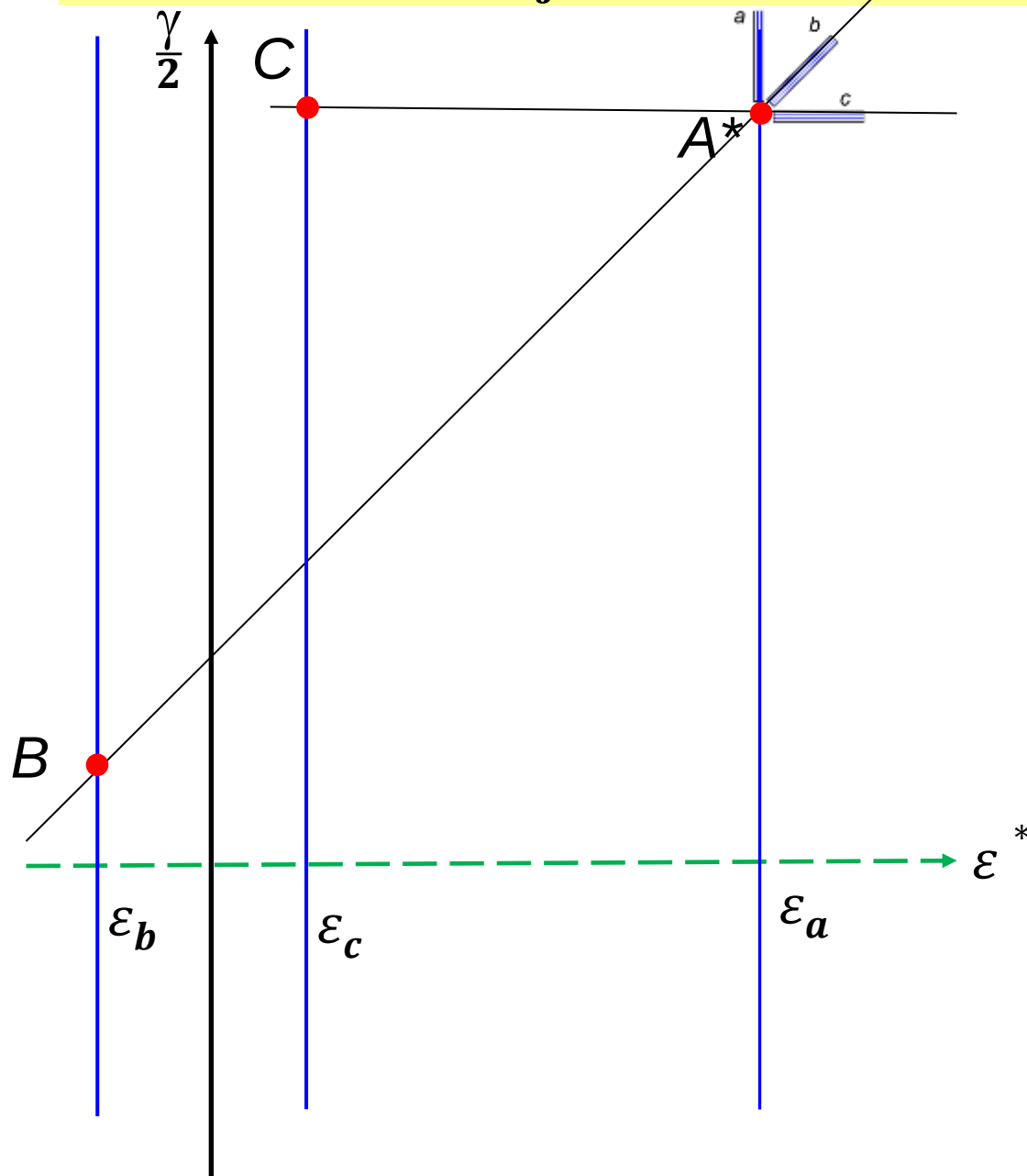
Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



3) Obieramy punkt startowy i rysujemy rozetkę zgodnie z kierunkiem odpowiedniego tensometru

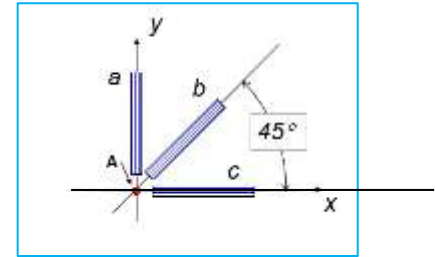
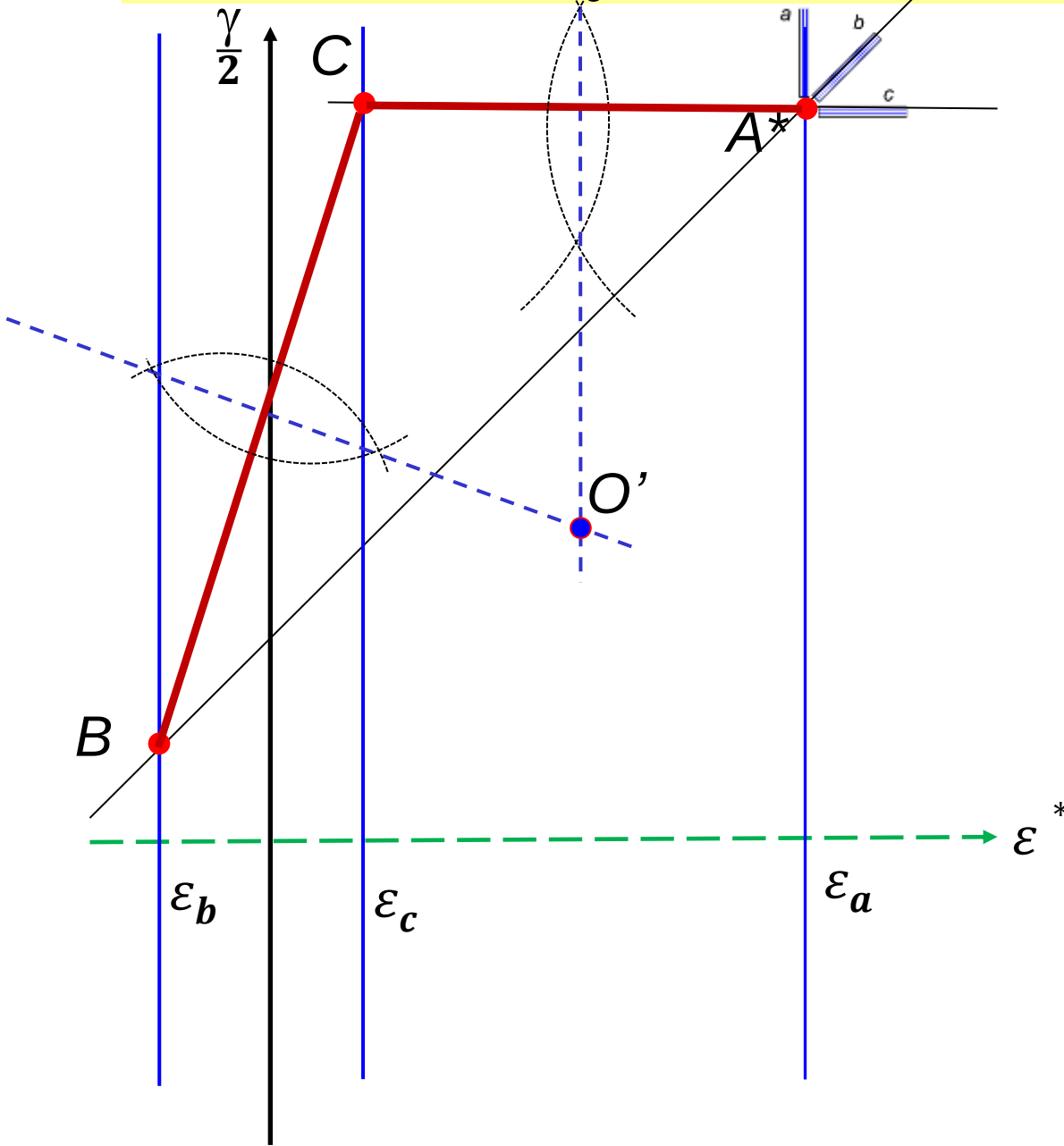


Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



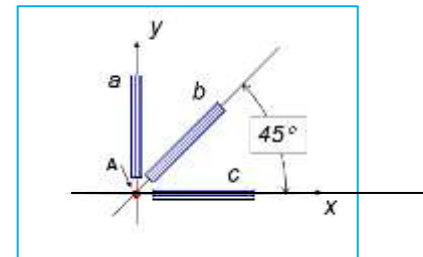
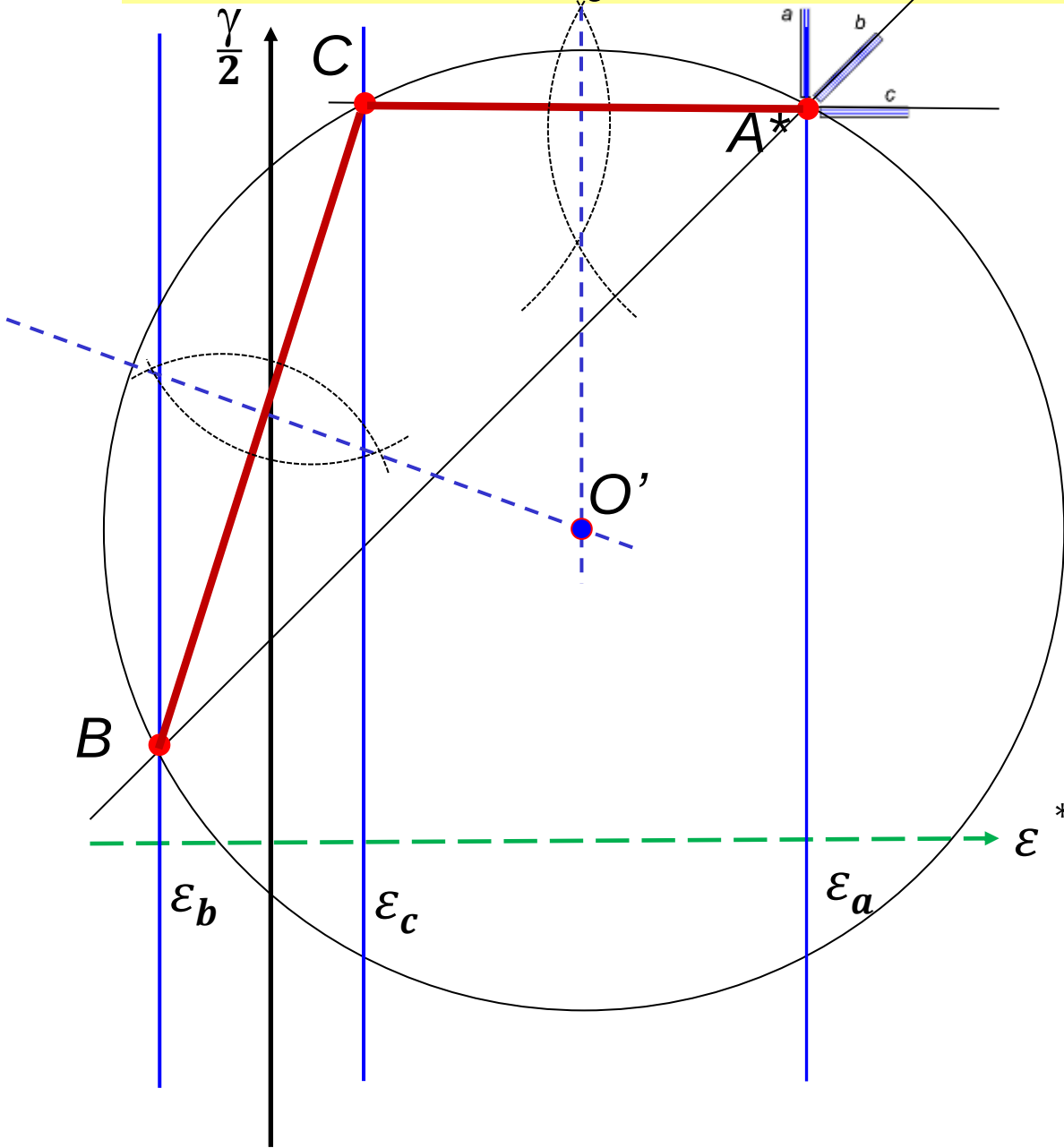
4) Rysujemy linie na kierunkach tensometrów, które przetną odpowiednie linie ich wskazań

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



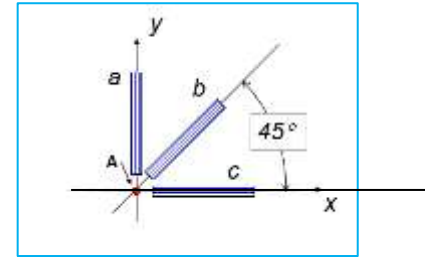
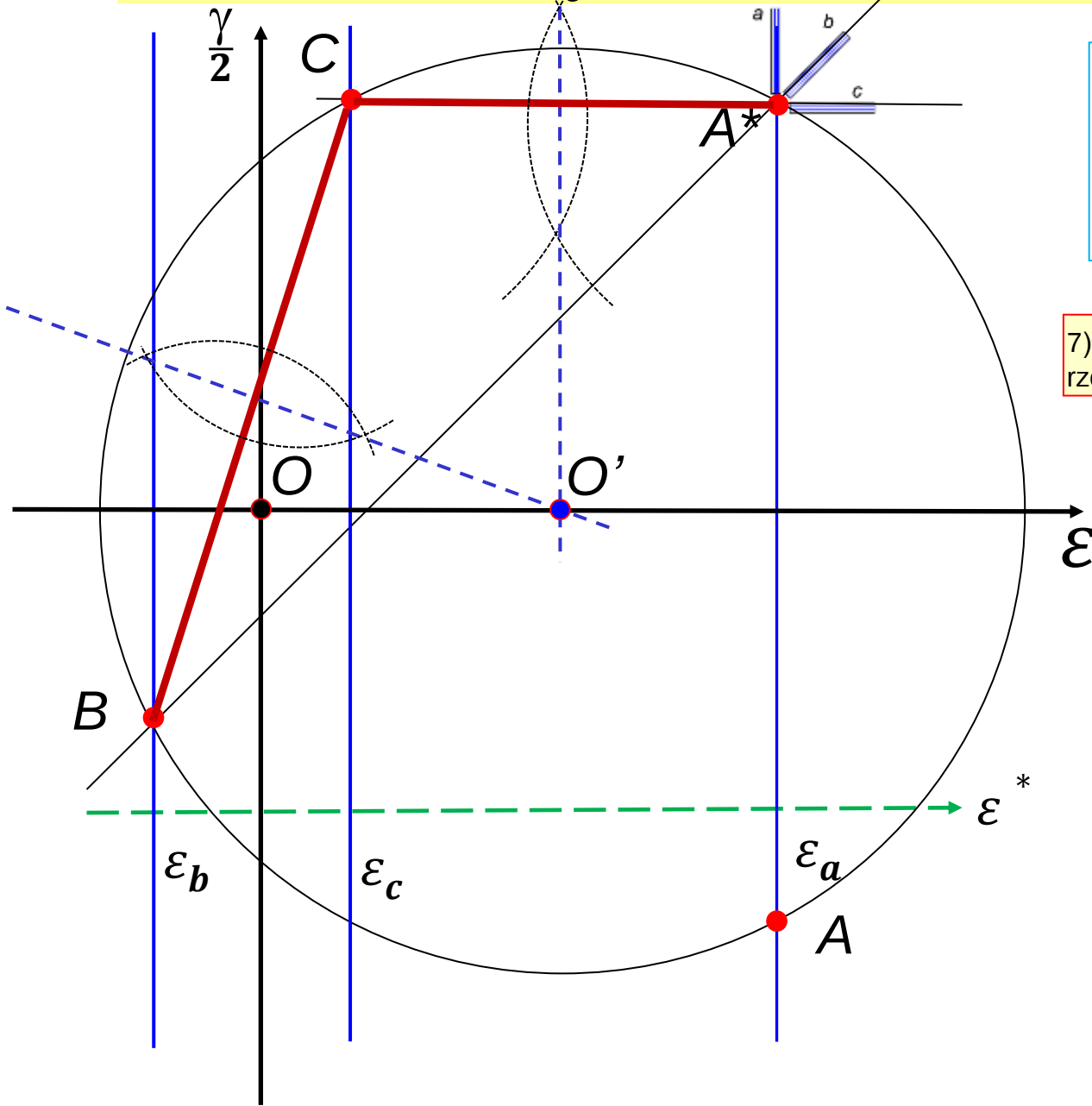
5) Rysujemy symetralne odcinków (cięciw) a na ich przecięciu oznaczamy środek koła Mohra O'

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



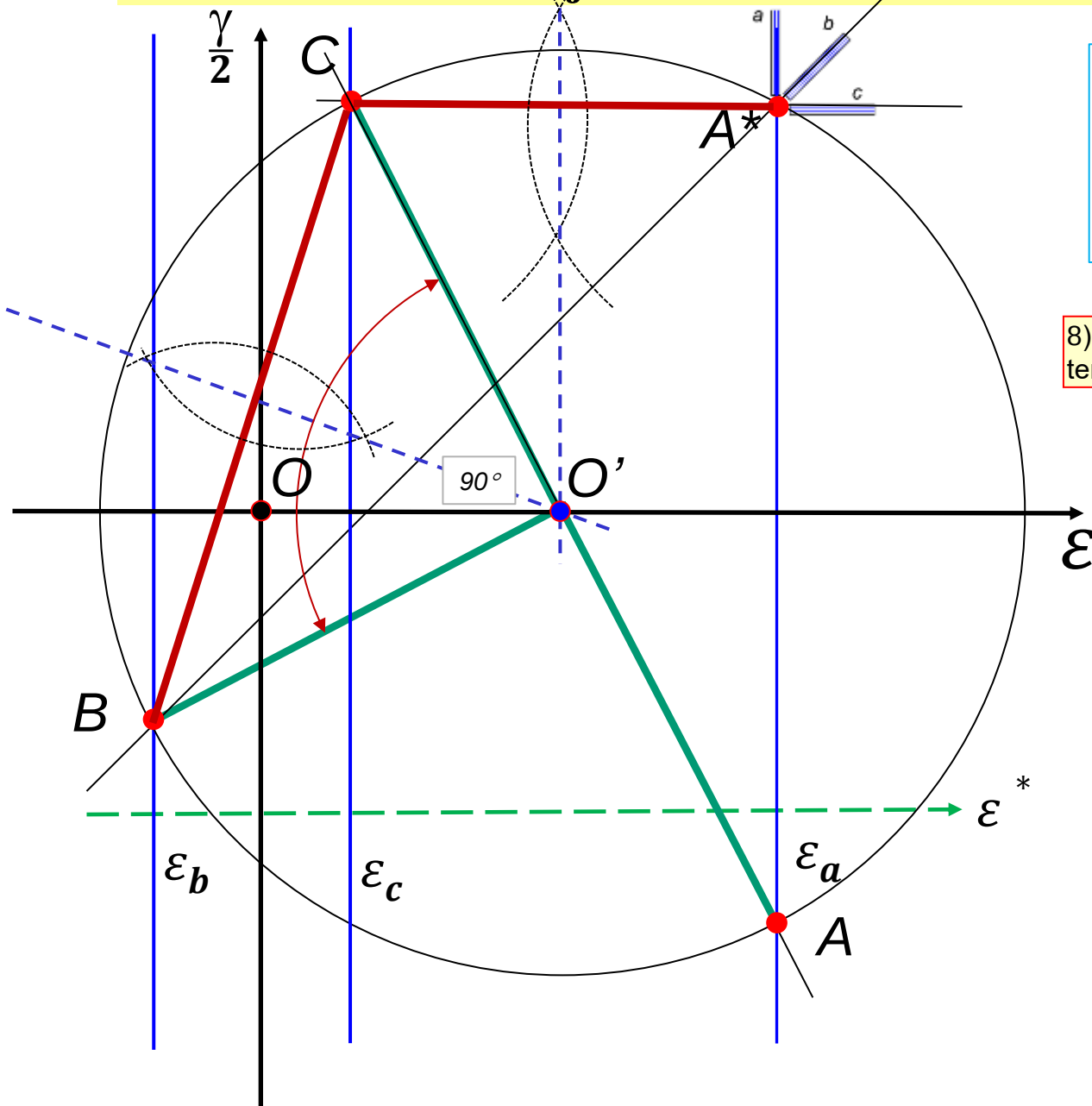
6) Rysujemy koło Mohra

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



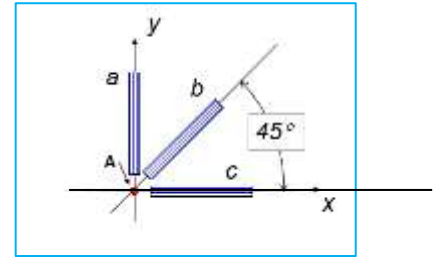
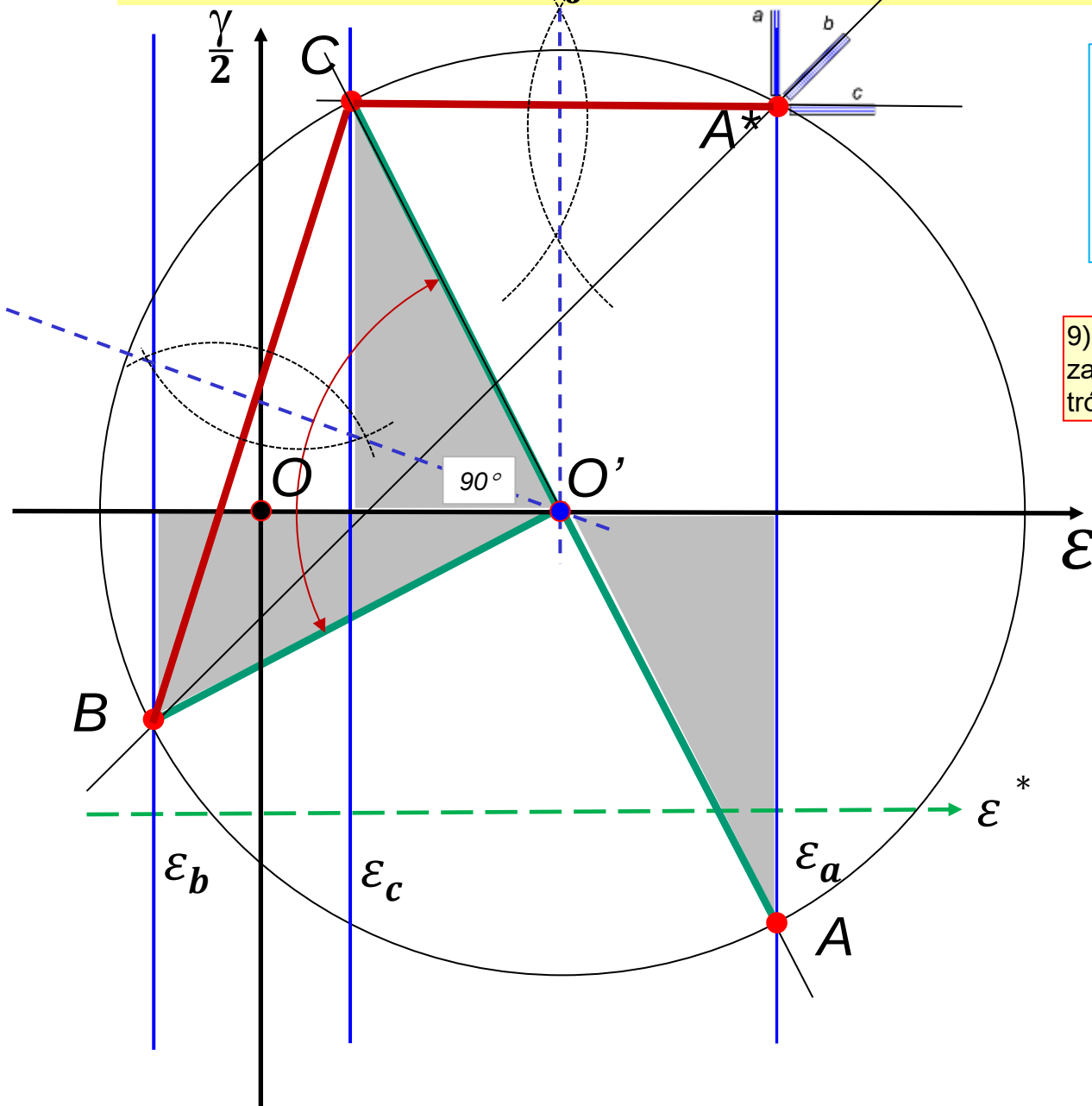
7) Rysujemy oś rzeczywistą ϵ i oznaczamy rzeczywisty punkt wskazania A

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



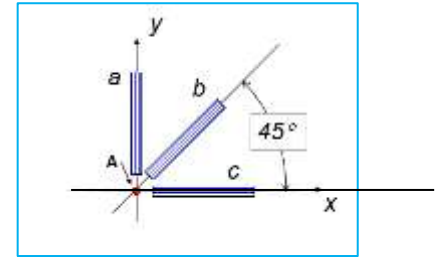
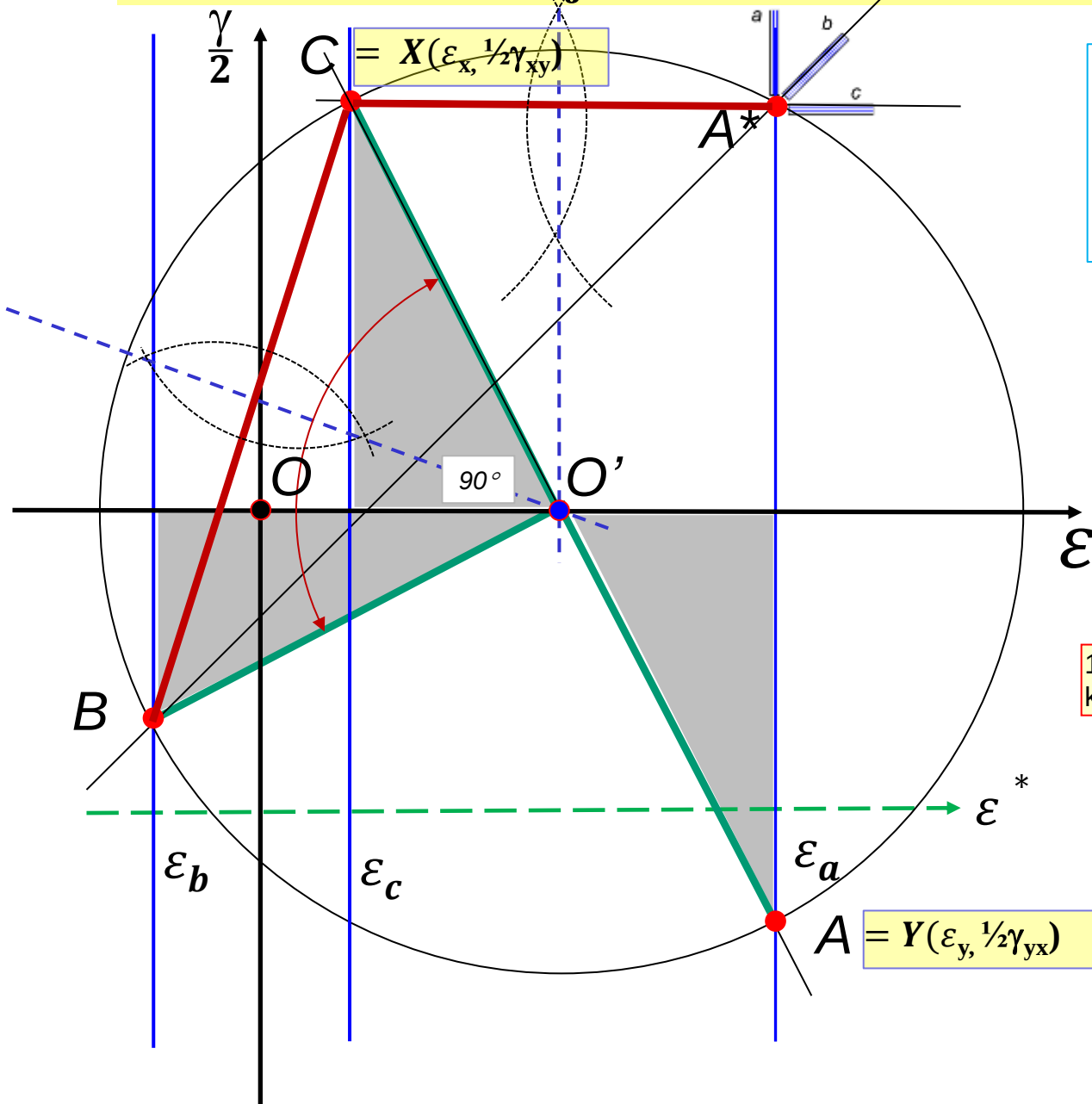
8) Punkty A, B i C są punktami wskazań tensometrów

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$



9) Dla takiej rozetki ($45^\circ/90^\circ$) można zauważyć podobieństwo odpowiednich trójkątów

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki 45°/90°



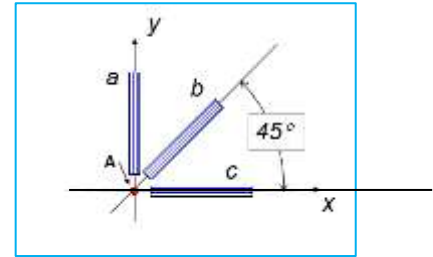
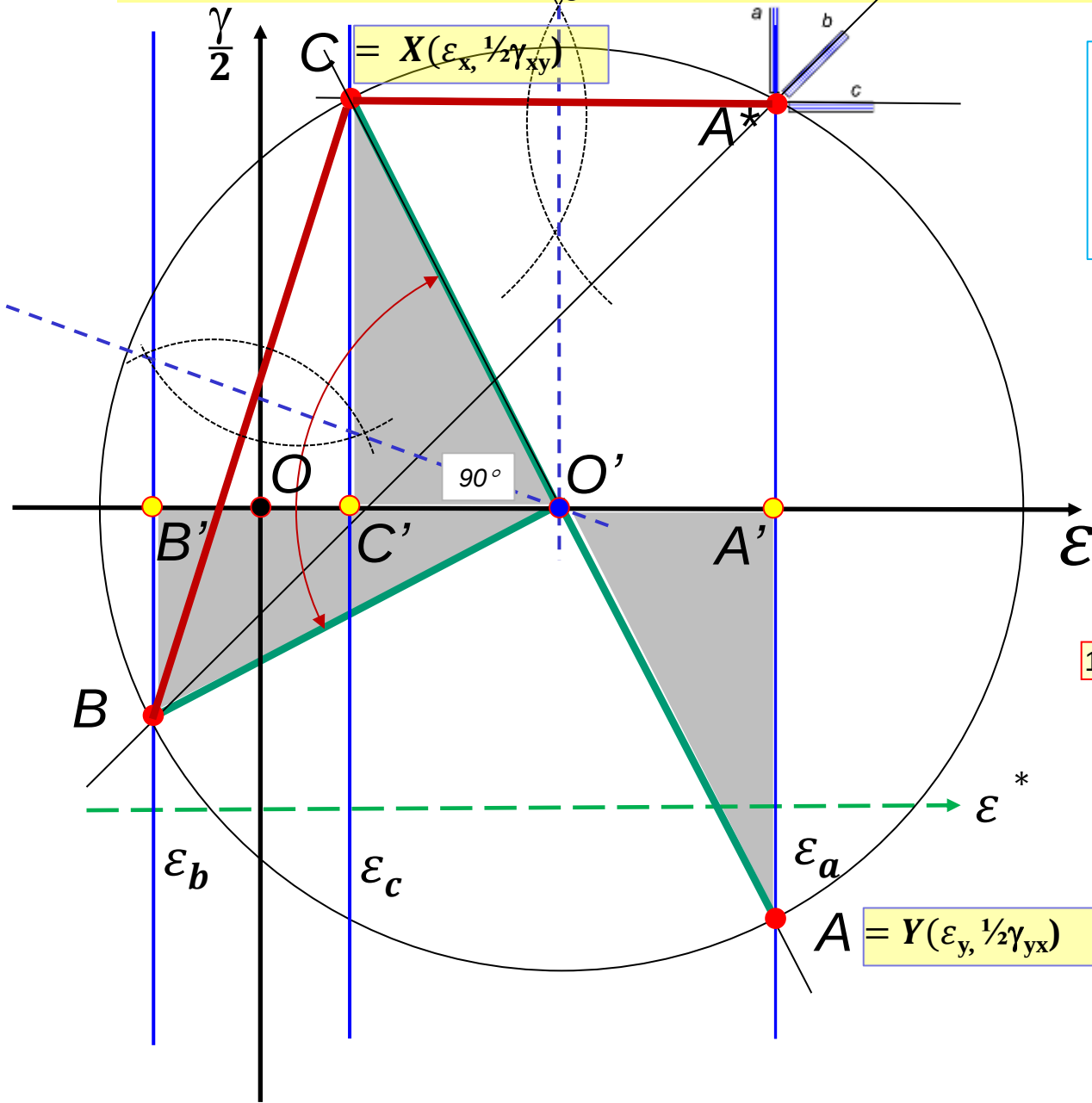
$$OO' = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0.25\%$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_c = 0.1\%$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_a = 0.4\%$$

10) Możemy wskazać punkty wskazań dla kierunków X i Y

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$



$$OO' = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0.25\%$$

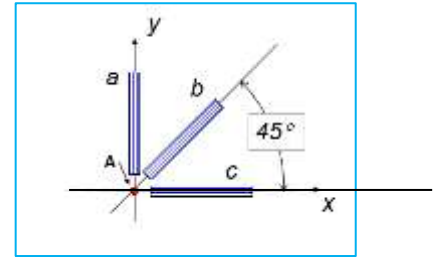
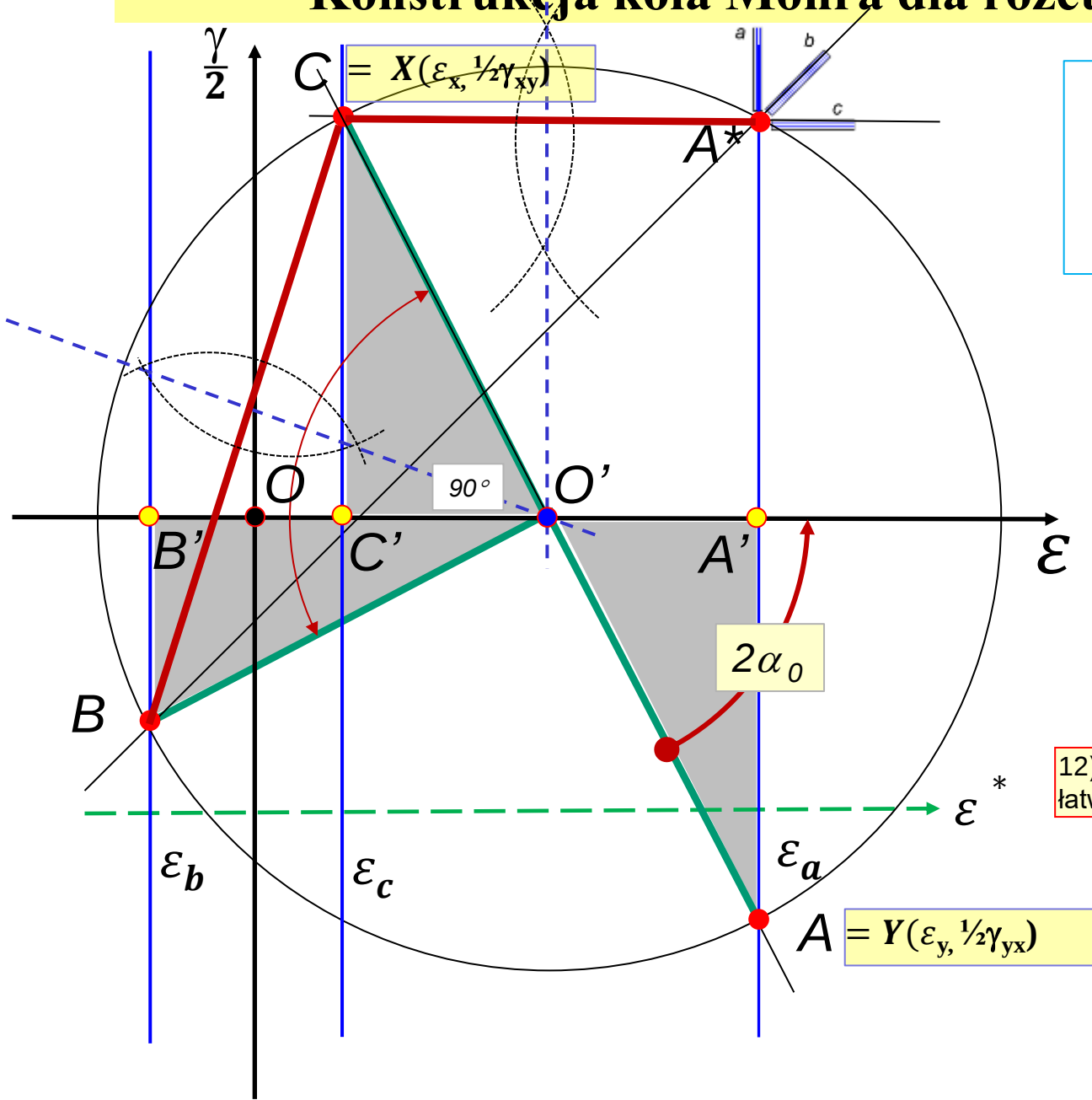
$$\varepsilon_x = \varepsilon_c = 0.1 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_a = 0.4 \text{ ‰}$$

11) Wprowadźmy dodatkowe punkty A' , B' i C'

$$A = Y(\varepsilon_y, 1/2\gamma_{yx})$$

Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$



$$OO' = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) = 0.25\%$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_c = 0.1 \text{ ‰}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_a = 0.4 \text{ ‰}$$

$$\frac{1}{2}\gamma_{xy} = CC' = OB' = OO' - \epsilon_b$$

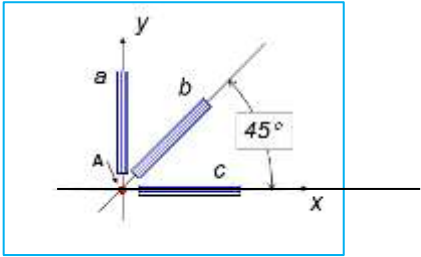
$$1/2\gamma_{xy} = 1/2(\epsilon_a + \epsilon_c) - \epsilon_b = 0.45\%$$

$$\gamma_{xy} = 0.9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg (CC' / C'O') = 36^\circ$$

12) Korzystając z podobieństwa trójkątów łatwo wyznaczyć odpowiednie wartości

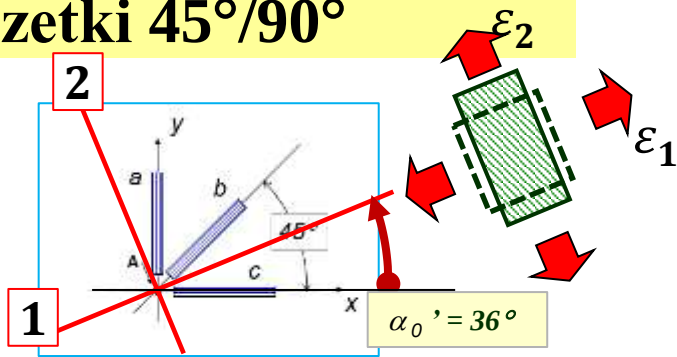
Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$



$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctg (CC' / C'O') = 36^\circ$$



Konstrukcja koła Mohra dla rozetki $45^\circ/90^\circ$



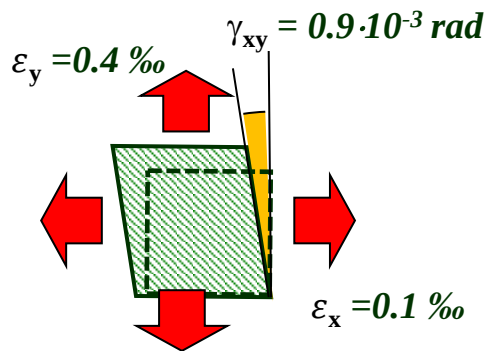
$$\varepsilon_2 = 0.00724\%$$

14) Można pokazać stan odkształcenia w kierunkach głównych

Stan naprężenia

Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w płaskim stanie naprężenia (PSN)

1) w kierunkach nie głównych:



$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y)$$

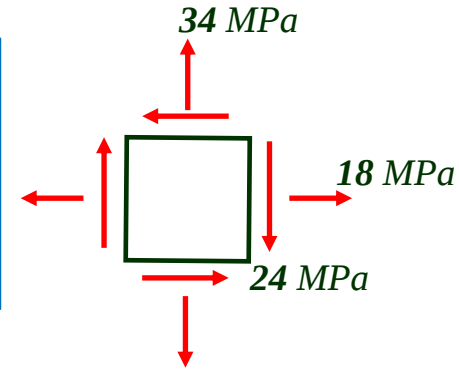
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x)$$

$$\tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

$$\sigma_x = 18 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = 34 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = 24 \text{ MPa}$$

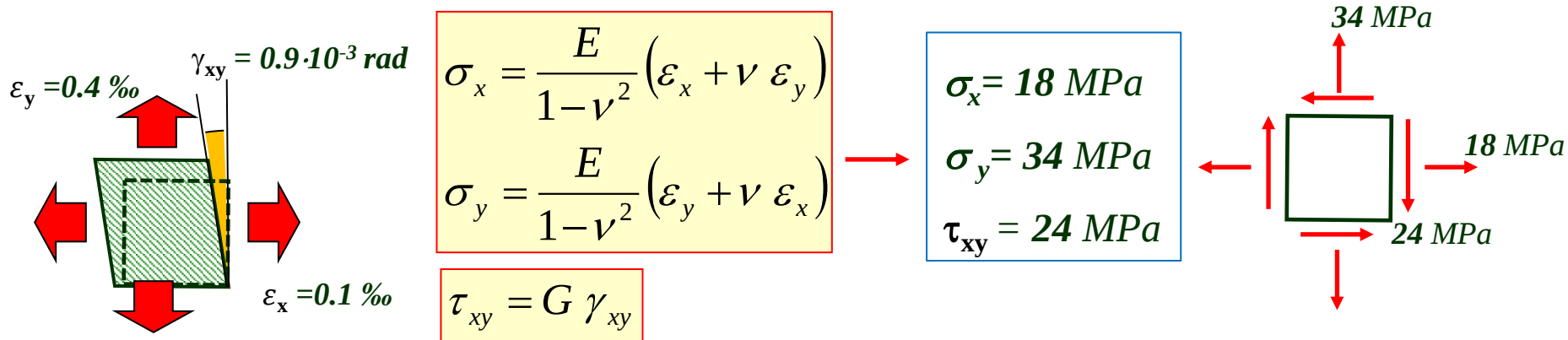


$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 2.65 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

Stan naprężenia

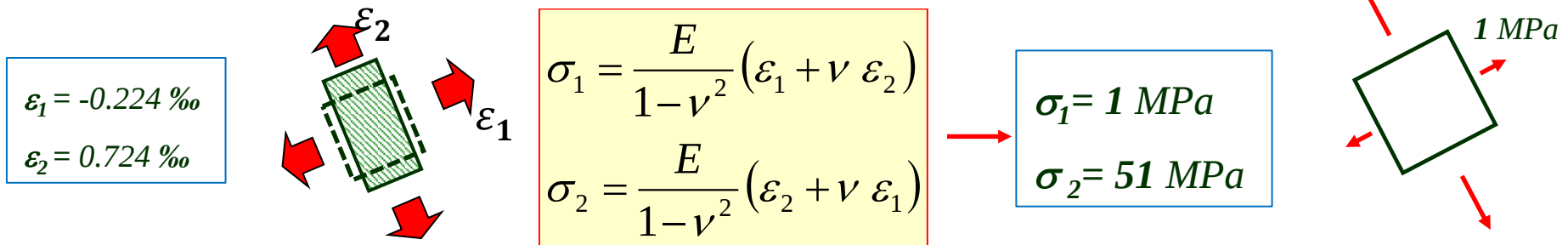
Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w płaskim stanie naprężenia (PSN)

1) w kierunkach nie głównych:



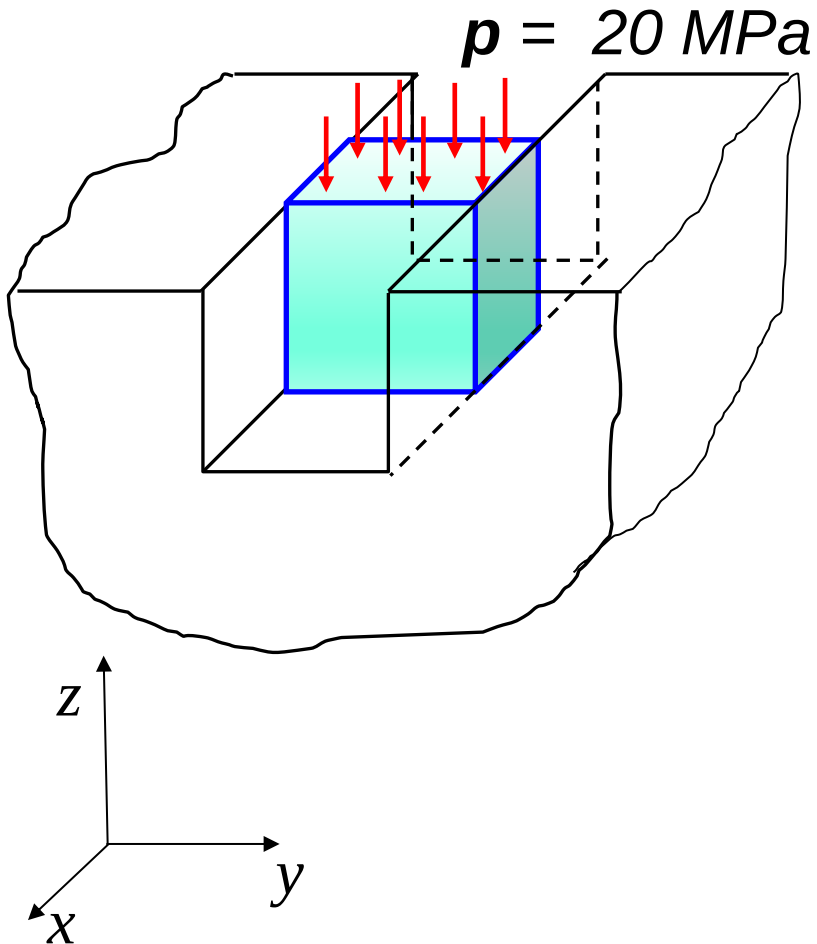
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 2.65 \cdot 10^4 \text{ MPa}$$

2) w kierunkach głównych:



ZADANIE 4.3

Kostkę sześcienną wykonaną z pleksiglasu umieszczono bez luzu i bez tarcia w stalowej pryzmie a następnie obciążono od góry naciskiem o wartości p . Wyznaczyć względną zmianę objętości kostki.

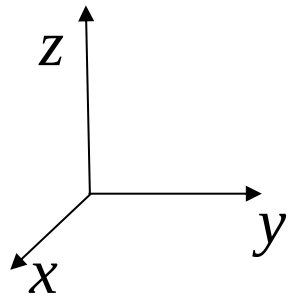
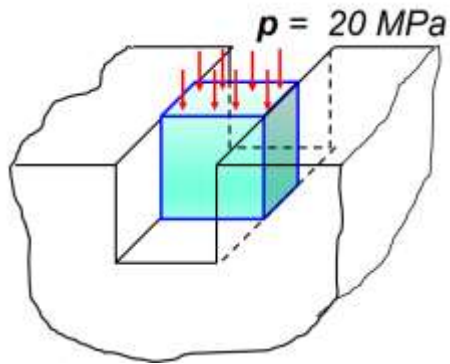


Material – pleksiglas

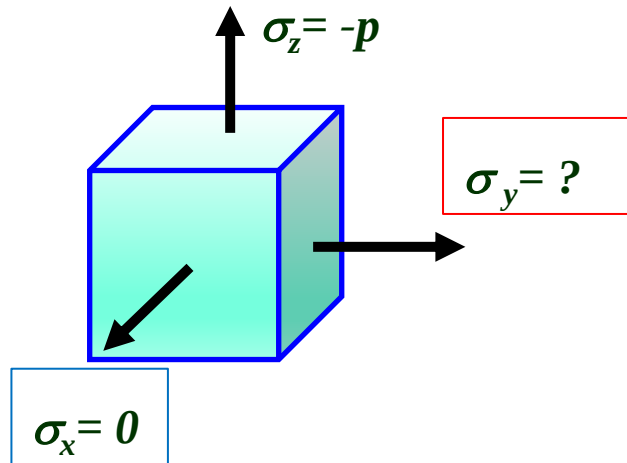
$$E = 3 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.34$$

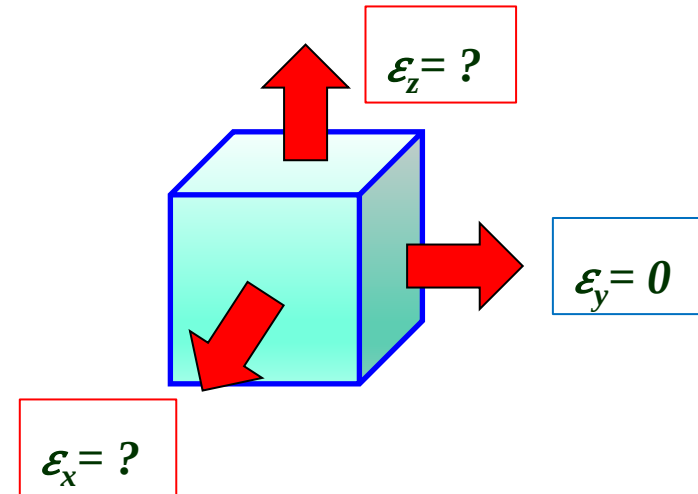
ZADANIE 4.3



Stan naprężenia:



Stan odkształcenia:



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (0 - \nu (\sigma_y - p)) \\ 0 &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (-p + 0)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (-p - \nu (0 + \sigma_y))\end{aligned}$$

ZADANIE 4.3

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (0 - \nu (\sigma_y - p)) \\ 0 &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (-p + 0)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (-p - \nu (0 + \sigma_y))\end{aligned}$$

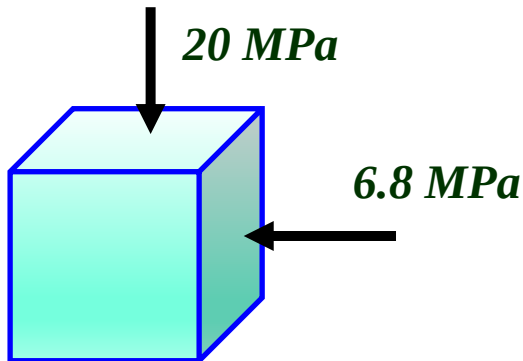


$$\varepsilon_x = \frac{\nu p}{E} (1 + \nu) = 0.003 = 3\text{‰}$$

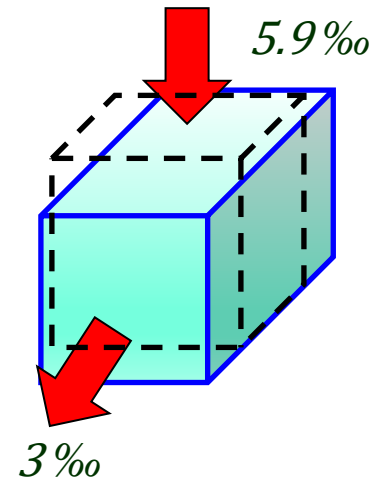
$$\sigma_y = -\nu p = -6.8 \text{ MPa}$$

$$\varepsilon_z = \frac{-p}{E} (1 - \nu^2) = -0.0059 = -5.9\text{‰}$$

Stan naprężenia:



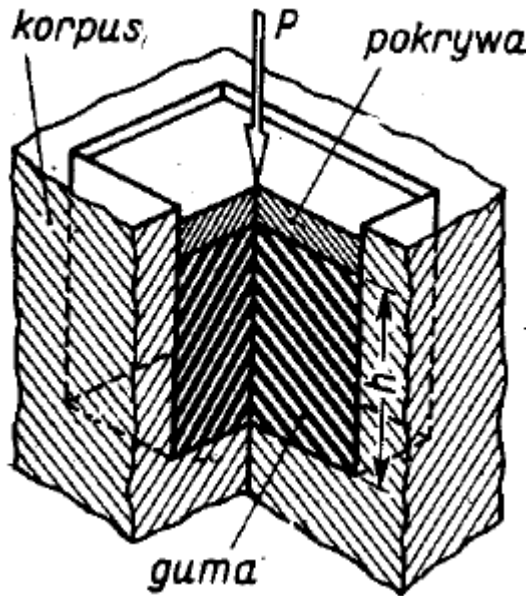
Stan odkształcenia:



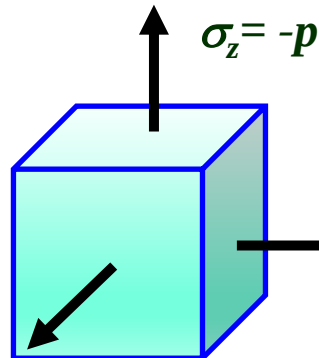
Względna zmiana objętości:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -0.0029 = -2.9\text{‰}$$

ZADANIE 4.4



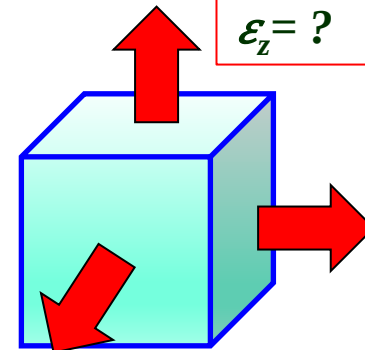
Stan naprężenia:



$$\sigma_x = ?$$

$$\sigma_y = ?$$

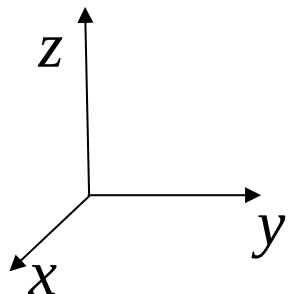
Stan odkształcenia:



$$\epsilon_z = ?$$

$$\epsilon_x = 0$$

$$\epsilon_y = 0$$

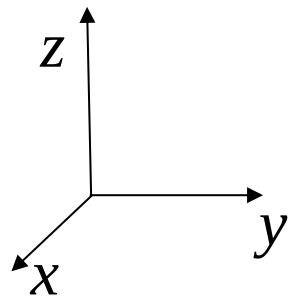
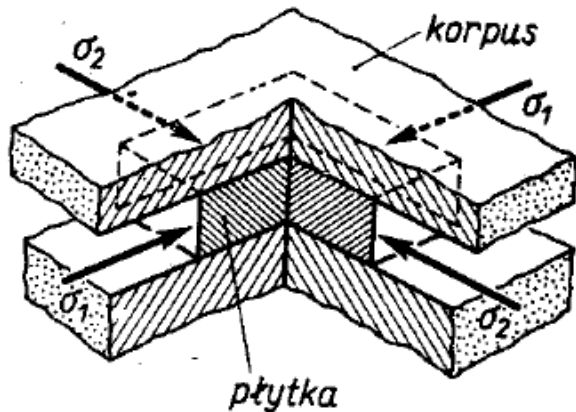


$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$

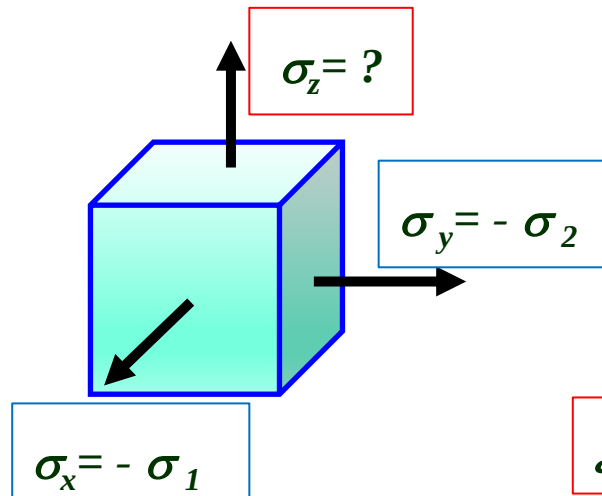


$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y - p)) \\ 0 &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (-p + \sigma_x)) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (-p - \nu (\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$

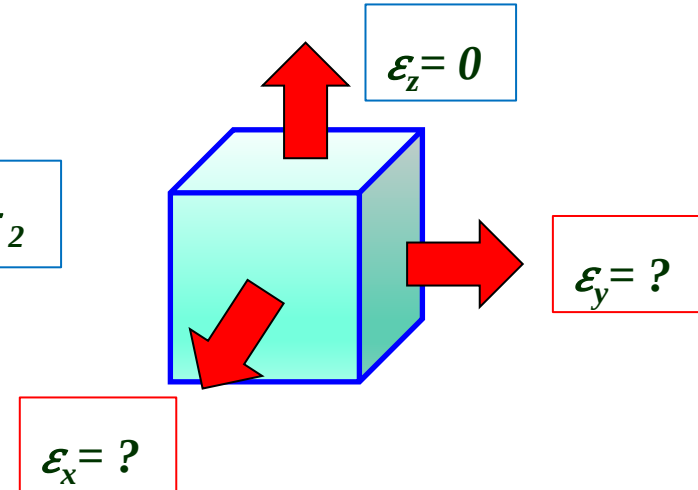
ZADANIE 4.5



Stan naprężenia:



Stan odkształcenia:



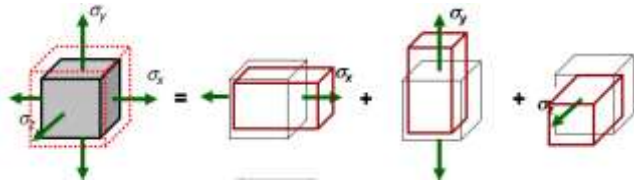
$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} (-\sigma_1 - \nu(-\sigma_2 + \sigma_z)) \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (-\sigma_2 - \nu(\sigma_z - \sigma_1)) \\ 0 &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(-\sigma_1 - \sigma_2))\end{aligned}$$

Podsumowanie

Postać prawa Hooke'a dla materiału izotropowego w stanie trójwymiarowym



$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}$$

E - moduł Younga
 ν - stała Poissona
 G - moduł Kirchhoffa

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

wektor składowych naprężenia:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

wektor składowych odkształcenia:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}_{6 \times 1}$$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$$

$6 \times 1 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times 1$

macierz konstytutywna:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

Podsumowanie

Uogólnione Prawo Hooke'a:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x))$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

E - moduł Younga

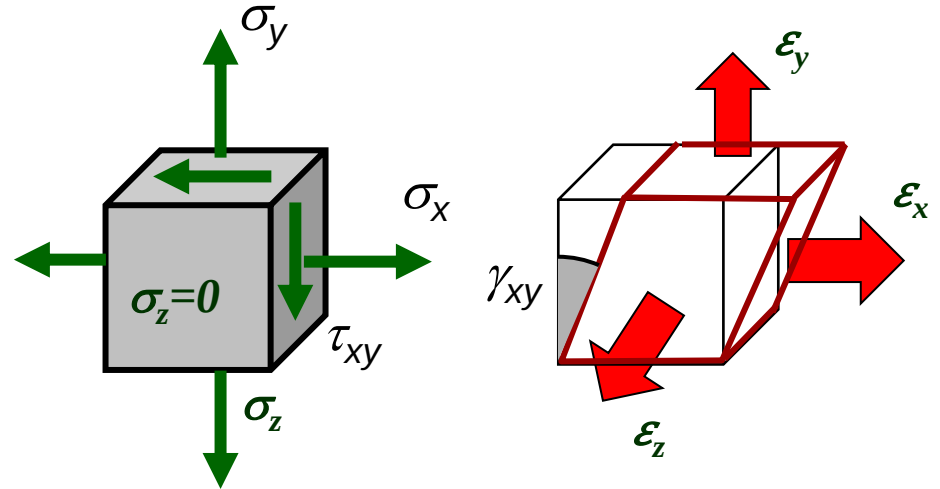
ν - stała Poissona

G - moduł Kirchhoffa

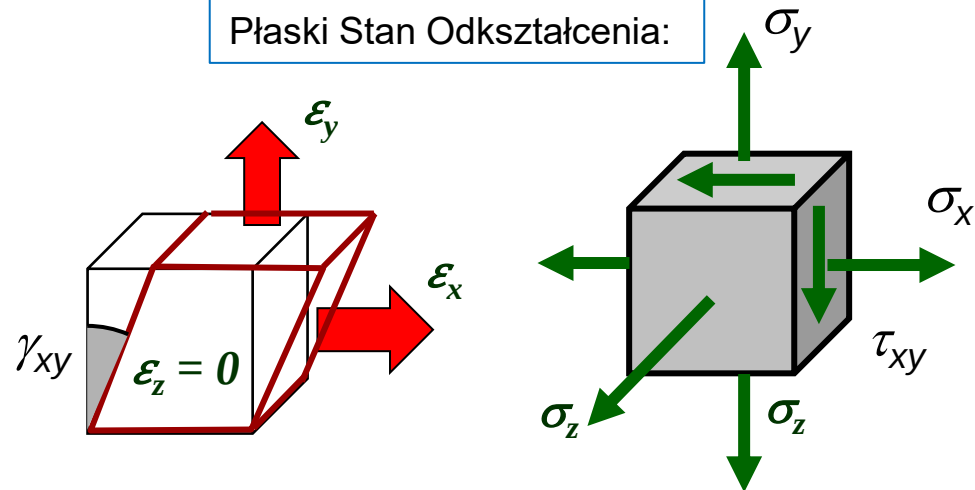
Dla materiałów izotropowych:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Płaski Stan Naprężenia:

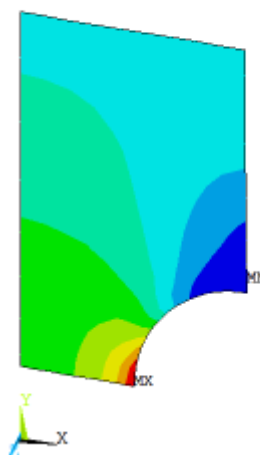
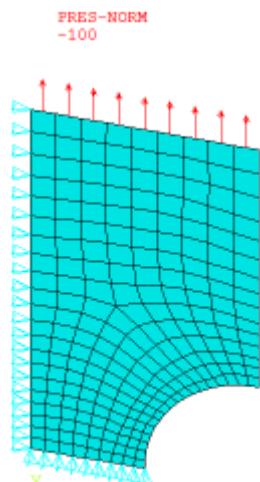
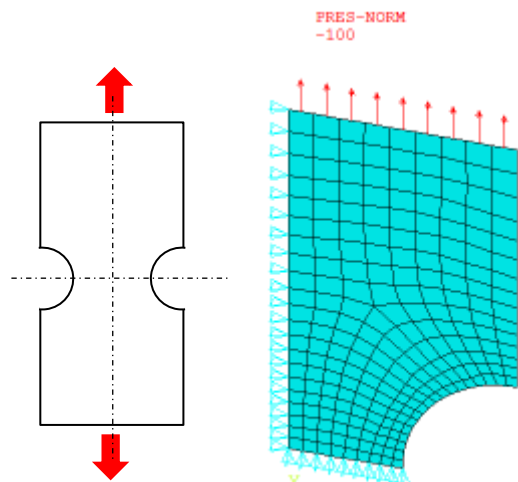


Płaski Stan Odkształcenia:



Podsumowanie

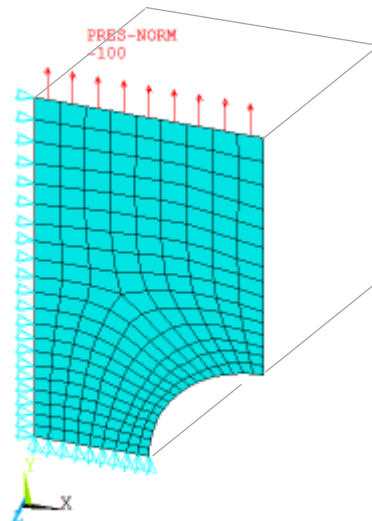
Płaski Stan Naprężenia



NODAL SOLUTION
SY (AVG)

-1.791
34.448
70.687
106.927
143.166
179.405
215.644
251.884
288.123
324.362

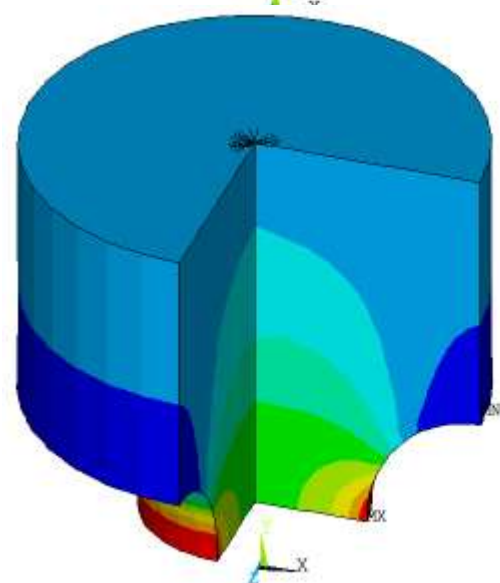
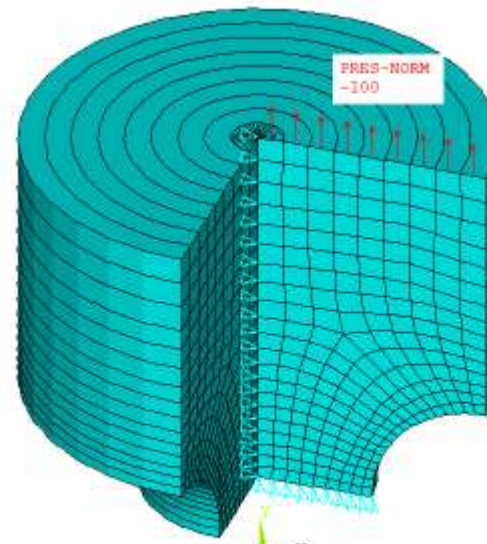
Płaski Stan Odkształcenia



NODAL SOLUTION
SY (AVG)

-1.7
34.669
71.038
107.407
143.777
180.146
216.515
252.884
289.254
325.623

Osiowa symetria



NODAL SOLUTION
/EXPANDED
SY (AVG)

-1.344
61.809
124.961
188.114
251.266
314.418
377.571
440.723
503.875
567.028

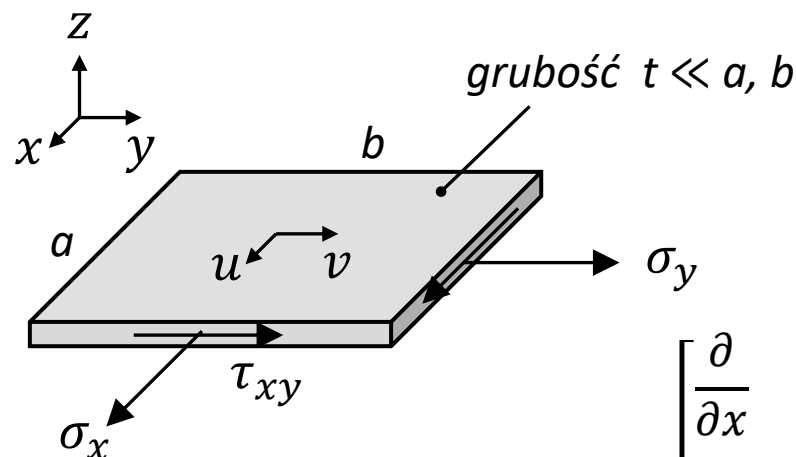
Płaski stan naprężenia (cienkie płyty i powłoki)

$$\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} ; \tau_{yz} = 0 ; \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_x ; \varepsilon_y ; \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} ; \gamma_{yz} = 0 ; \gamma_{zx} = 0$$



wektor przemieszczenia:

$$\begin{bmatrix} u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u, v \end{bmatrix}$$

1×2

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

3×2

macierz gradientu

wektor składowych

$$\text{odkształcenia: } \begin{bmatrix} \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

1×3

$$\{\varepsilon\} = [R]\{u\}$$

$3 \times 1 \quad 3 \times 2 \quad 2 \times 1$

macierz

konstrytuwna dla PSN:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

$3 \times 1 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 1$

wektor składowych

naprężenia:

$$\begin{bmatrix} \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

1×3

$$[D] = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \nu) \end{bmatrix}$$

3×3

Płaski stan odkształcenia (nieskończenie długa rura, pryzma i wałek)

$$\sigma_x \ ; \ \sigma_y \ ; \ \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\tau_{xy} \ ; \ \tau_{yz} = 0 \ ; \ \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_x \ ; \ \varepsilon_y \ ; \ \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} \ ; \ \gamma_{yz} = 0 \ ; \ \gamma_{zx} = 0$$

wektor przemieszczenia:

$$\begin{matrix} [u] \\ 1 \times 2 \end{matrix} = [u, v]$$

wektor składowych
odkształcenia:

$$\begin{matrix} [\varepsilon] \\ 1 \times 3 \end{matrix} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]$$

wektor składowych
naprężenia:

$$\begin{matrix} [\sigma] \\ 1 \times 3 \end{matrix} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]$$

$$\begin{matrix} \{\varepsilon\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [R] \\ 3 \times 2 \end{matrix} \begin{matrix} \{u\} \\ 2 \times 1 \end{matrix}$$

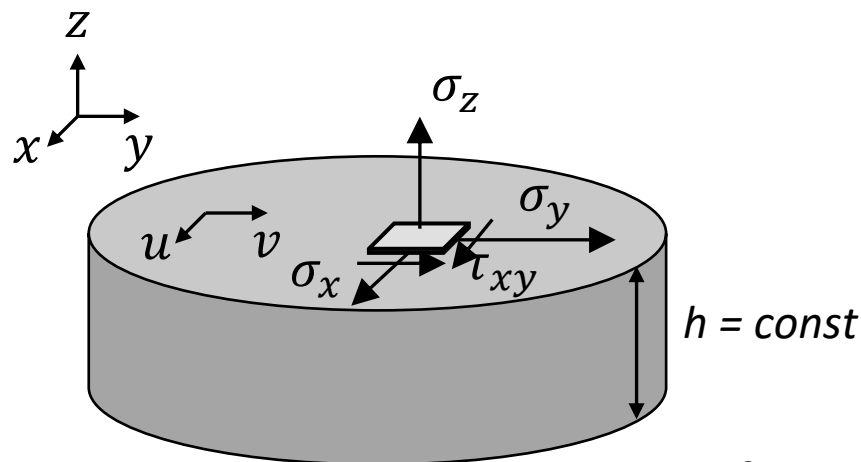
macierz
gradientu

$$[R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \{\sigma\} \\ 3 \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [D] \\ 3 \times 3 \end{matrix} \begin{matrix} \{\varepsilon\} \\ 3 \times 1 \end{matrix}$$

macierz konstytutywna dla PSO:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix}$$



Osiowa symetria (bryła obrotowa)

$$\sigma_x \ ; \ \sigma_y \ ; \ \sigma_z$$

$$\tau_{xy} \ ; \ \tau_{yz} = 0 \ ; \ \tau_{zx} = 0$$

$$\varepsilon_x \ ; \ \varepsilon_y \ ; \ \varepsilon_z = 0$$

$$\gamma_{xy} \ ; \ \gamma_{yz} = 0 \ ; \ \gamma_{zx} = 0$$

wektor przemieszczenia: $[u] = [u, v]$
 1×2

wektor składowych odkształcenia:

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}]$$
 1×4

wektor składowych naprężenia:

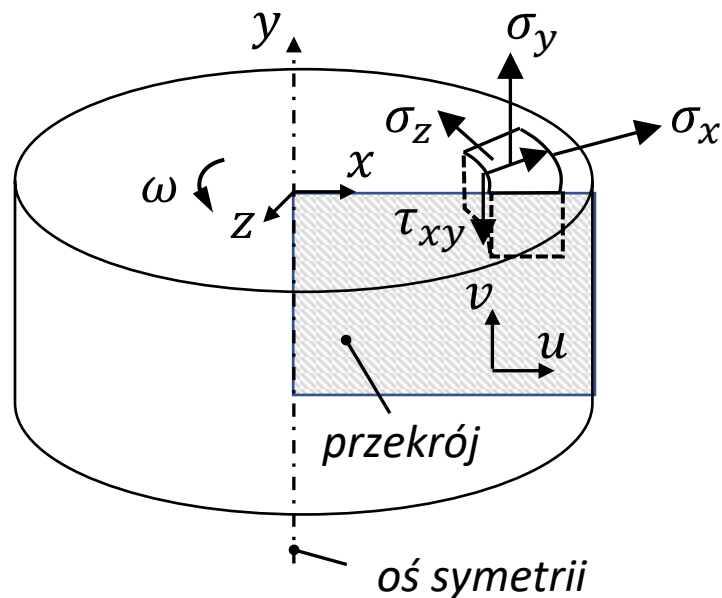
$$[\sigma] = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}]$$
 1×4

kierunki:

x – promieniowy

y – osiowy

z – obwodowy



macierz gradientu:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$[R] =$$
 4×2

$$[D] = \frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 - \nu \end{bmatrix}$$

macierz konstytutywna dla osiowej symetrii